スーパーリーマン面上K理論とリーマン・ロッホの定理

谷口 正*

(2012年11月29日受理)

1 はじめに

スーパー多様体上のコホモロジーの次元はスーパーベクトル空間のスーパー次元 $(n|N) \in \mathbb{Z}_{\geqq 0} \oplus \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ のように表わされる．コホモロジーのスーパー次元表現と古典的特性類を使った $N=1$ スーパーリーマン面上直線束のリーマン・ロッホの定理はニーネマン [3] によって知られている．ブルゾ [2] や谷口 [4] によってスーパー多様体上のスーパーチャーン類が定義されたが，このスーパーチャーン類はスーパー整数 $(n|N) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ に値をとるものである．スーパーチャーン類は不変量なので整数 $\mathbb{Z}$ に値をとってほしいという思いから谷口 [5] は整数 $\mathbb{Z}$ に値をとる一連の特性類を定義することに成功した．そしてスーパーコホモロジーの次元を $n+N \in \mathbb{Z}$ と考えることによって，一般の N スーパーリーマン面上直線束のリーマン・ロッホの定理を得た（4節の定理1）．

一方，マニンたち [6] はスーパー多様体上のK群を定義した．このK群がスーパー多様体上のK群として最良のものかどうかは今後検証する必要があると考えられる．

この論文では始めにスーパー多様体の定義を紹介し，次にマニンたちによって構成されたK群を紹介する．得られた結果はこのK群とK環例の構成する．そして [5] によって得られている N スーパーリーマン面上リーマン・ロッホの定理（4節の定理1）のマニンたちによるK群解釈である．特性類は [5] で得られた整数 $\mathbb{Z}$ に値をとるものを採用する．

2 スーパー多様体

X を位相空間とする．$\mathcal{O}_X$ をその構造層とする．組 $(X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間という．

定義 1. スーパースペースとは局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ でその構造層 $\mathcal{O}_X$ が $\mathbb{Z}_2$-次数付き可換環の層のときをいう．$\mathbb{Z}_2$-次数付き環の層を $\widehat{\mathcal{O}}_X = \mathcal{O}_{X,0} \oplus \mathcal{O}_{X,1}$ と記して，スーパースペースを $\widehat{X} := (X, \widehat{\mathcal{O}}_X)$ と書く．

注意 1. この定義1の出発点の環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ にスキーム構造を入れればスーパースキームなる対象を定義できる．スーパースキームの研究は今後の興味ある問題である．

$J_X := \mathcal{O}_{X.1} \oplus (\mathcal{O}_{X.1})^2$ を $\widehat{\mathcal{O}}_X$ のベキレイのイデアル層とする．$\widehat{\mathcal{O}}_X$ は J_X のベキによってフィルトレーションをもち，$\mathrm{Gr}^i \widehat{\mathcal{O}}_X := J_X^i / J_X^{i+1}$, $\mathrm{Gr}\widehat{\mathcal{O}}_X := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Gr}^i \widehat{\mathcal{O}}_X$ とおく．そのとき

定義 2. 環付き空間 $\mathrm{Gr}\widehat{X} = (X, \mathrm{Gr}\widehat{\mathcal{O}}_X)$ を一般化スーパースペースと呼ぶ．

一般に，$\widehat{X} \subset \mathrm{Gr}\widehat{X}$ であるが，$\widehat{X} = \mathrm{Gr}\widehat{X}$ のとき，split なスーパースペースという．

次に，スーパースペースの特別な場合であるスーパー多様体を定義する．

定義 3. スーパースペース $\widehat{X} = (X, \widehat{\mathcal{O}}_X)$ が，$(n|N)$ 次元のスーパー多様体であるとは次の条件をみたすときをいう．

$X_{red} := (X, \widehat{\mathcal{O}}_X / J_X)$ が古典的 n 次元多様体

$\mathcal{F} := J_X / J_X^2$ がランク N の局所自由 $\widehat{\mathcal{O}}_X / J_X$-加群のとき，局所同型 $\widehat{\mathcal{O}}_X \simeq \bigwedge^{\cdot} \mathcal{F}$ が存在

特に，　の局所同型が大域的同型のとき，split なスーパー多様体という．

例 1. $\mathbb{C}^{n|N} := (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}(\mathbf{S}^{\cdot}\mathbb{C}^n \otimes \bigwedge^{\cdot} \mathbb{C}^N))$ は複素 $(n|N)$ 次元スーパーベクトルスペースという．ここで $\mathcal{O}(\mathbf{S}^{\cdot}\mathbb{C}^n \otimes \bigwedge^{\cdot} \mathbb{C}^N)$ は対称代数と外積代数のテンソル積の層である．

例 2. $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}} := \bigwedge^{\cdot}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1) \otimes \mathbb{C}^N)$ と定義して $\mathbf{P}^{n|N} := (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}})$ を複素 $(n|N)$ 次元スーパー射影空間とい

* 一般教科　自然

う．$\mathbf{P}^{n|N}$ 上次数 d の直線層を $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}(d) := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}$ と定義する．また *odd* 直線層を $\Pi\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}(d) := \Pi\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}$ と定義する．

例 **3.** $\widehat{\mathcal{O}}_\Sigma := \bigwedge^{\cdot}(K_\Sigma^{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{C}^N)$ と定義して $\widehat{\Sigma} = (\Sigma, \widehat{\mathcal{O}}_\Sigma)$ を複素 $(1|N)$ 次元の N スーパーリーマン面という．ここで K_Σ はリーマン面 Σ の標準束である．

3 スーパー多様体上のグロタンディーク・マニン群

この節ではマニンたち [6] によるスーパー多様体上 K 群を紹介する．

定義 **4.** $\widehat{X} = (X, \widehat{\mathcal{O}}_X)$ をスーパー多様体とする．
$\mathrm{Vect}(\widehat{\mathrm{X}}) := \{[\widehat{\mathrm{E}}_\mathrm{i}] \mid$ 各$\widehat{\mathrm{E}}_\mathrm{i}$は$\widehat{\mathrm{X}}$上の複素スーパーベクトル束$\}$,
$F(\mathrm{Vect}(\widehat{\mathrm{X}})) := \{\sum_\mathrm{i} \mathrm{n_i}[\widehat{\mathrm{E}}_\mathrm{i}] \mid \mathrm{n_i} \in \mathbb{Z}, [\widehat{\mathrm{E}}_\mathrm{i}] \in \mathrm{Vect}(\widehat{\mathrm{X}})\}$
$H(\mathrm{Vect}(\widehat{\mathrm{X}})) := \{[\widehat{\mathrm{E}}_\mathrm{i}] - [\widehat{\mathrm{E}}_\mathrm{j}] - [\widehat{\mathrm{E}}_\mathrm{k}] \mid 0 \to \widehat{\mathrm{E}}_\mathrm{j} \to \widehat{\mathrm{E}}_\mathrm{i} \to \widehat{\mathrm{E}}_\mathrm{k} \to 0$ は $\mathrm{exact}\}$,
と置いたとき
$K_S(\widehat{X}) := K_S(\mathrm{Vect}(\widehat{\mathrm{X}})) := \mathrm{F}(\mathrm{Vect}(\widehat{\mathrm{X}}))/\mathrm{H}(\mathrm{Vect}(\widehat{\mathrm{X}}))$
をスーパー多様体 $\widehat{X}$ 上スーパーベクトル束のスーパーグロタンデイーク群または単にスーパー K 群と呼ぶ．

これは古典的な場合と同様に環にもなっていることに注意する．
X は多様体でこの K 群の特別な場合が次の 3 種類定義できる。
X 上 $\mathbb{C}^{r|s}$-束 E の K 群を $K_S(X)$, X 上 $\mathbb{C}^r$-束 F の K 群を $K(X)$, X 上 $\mathbb{C}^{0|s} = \Pi\mathbb{C}^s$-束 G の K 群を $\Pi K(X)$ と記す．$K(X)$ がよく知られている古典的な K 群である．$E = F \oplus G$ より自然な同型

$$K_S(X) \simeq K(X) \oplus \Pi K(X)$$

がある．
この定義 4 はスーパーベクトル束で行なったが，もっと一般的に $\widehat{X}$ 上連接層の同型類から同様に定義できる．この K 群を $K^S(\widehat{X})$ と記す．すると一般に

$$K_S(\widehat{X}) \subset K^S(\widehat{X})$$

となる．古典的なときと違いスーパー多様体のときは $K_S(\widehat{X})$ より $K^S(\widehat{X})$ の方がかなり大きなクラスになると考えられる．

命題 **1 (Schmitt,Manin).** 次の同型が存在する：

$$K_S(\widehat{X}) \simeq K_S(X) \simeq K(X) \oplus \Pi K(X)$$

この結果から $K_S(\widehat{X})$ は古典的な K 群に帰着されてしまう．すなわちスーパー多様体の構造が反映されていない．Manin は包含関係 $K_S(\widehat{X}) \subset \quad \square \quad \subset K^S(\widehat{X})$ にある□の部分でスーパー多様体の構造を反映した K 群を導いた．ここではその導く過程は述べずに，定義として紹介するに留める．

定義 **5.**

$$KS(\widehat{X}) := Gr\widehat{\mathcal{O}}_X \cdot K_S(\widehat{X})$$

これをグロタンディーク・マニン群と呼ぶ．$KS(\widehat{X})$ は $\mathbb{Z}_2$-次数付き環構造が入る．

4 スーパーリーマン・ロッホの定理

この節では得られた結果を述べる．始めにグロタンディーク・マニン群とグロタンディーク・マニン環の例を構成する．アティア [1] による K 群の例をスーパー多様体上に拡張する．

補題 **1.** $(n|N)$ 次元のスーパー複素射影空間 $\mathbf{P}^{n|N}$ について次が成り立つ．
(i) 群としての次の同型が成り立つ：

$$KS(\mathbf{P}^{n|N}) \simeq \mathbb{Z}^{n+1} \oplus \Pi\mathbb{Z}^{n+1}$$

ここで $\mathbb{Z}$ は生成元 1 をもつものとしたとき $\Pi\mathbb{Z}$ は生成元 -1 をもつものとする．環としては $\mathbb{Z}$ と $\Pi\mathbb{Z}$ は同型である．
(ii) 環としての次の同型が成り立つ：

$$KS(\mathbf{P}^{n|N}) \simeq (\mathbb{Z}[\eta-1]/(\eta-1)^{n+1}) \oplus \Pi(\mathbb{Z}[\mu-1]/(\mu-1)^{n+1})$$

ここで
$\eta - 1 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}(1) - \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}$, $\mu - 1 = \Pi\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}(1) - \Pi\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}$

証明. (i) を証明する．

$$\mathbb{Z}^{n+1} \oplus \Pi\mathbb{Z}^{n+1} \longrightarrow KS(\mathbf{P}^{n|N})$$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \eta^i + \sum_{i=0}^{n} b_i \mu^i$$

は全射であるが単射であることも示せる．ただし，$\eta^i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}(i)$, $\mu^i = \Pi\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}(i)$ である．よって群としての同

型が示せた.

次に (ii) を証明する.

$$(\mathbb{Z}[\eta-1]/(\eta-1)^{n+1})\oplus\Pi(\mathbb{Z}[\mu-1]/(\mu-1)^{n+1}) \longrightarrow KS(\mathbf{P}^{n|N})$$

$$(\eta-1,\mu-1) \longmapsto (\eta,\mu)$$

$$KS(\mathbf{P}^{n|N}) \longrightarrow (\mathbb{Z}[\eta-1]/(\eta-1)^{n+1})\oplus\Pi(\mathbb{Z}[\mu-1]/(\mu-1)^{n+1})$$

$$\widehat{E}=\widehat{F}\oplus\widehat{G} \longmapsto (\alpha(\widehat{F},\eta),\alpha(\widehat{G},\mu))$$

ここで

$$\alpha(\widehat{F},\eta) := \sum_{i=0}^{n}\chi(\mathbf{P}^{n|N},\widehat{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}(i))(\eta-1)^i,$$

$$\alpha(\widehat{G},\mu) := \sum_{i=0}^{n}\chi(\mathbf{P}^{n|N},\widehat{G}\otimes\Pi\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n|N}}(i))(\mu-1)^i.$$

$\chi(\widehat{X},\cdot)$ はオイラー標数である. □

次に [5] で得られている N スーパーリーマン面上の直線束に対するリーマン・ロッホの定理を述べる. 以下の定理のスーパーコホモロジー次元 $\mathrm{dim}H^*(\widehat{X},\cdot)=(r|s)$ は $r+s\in\mathbb{Z}$ と考えるところが重要である.

定理 1 (Taniguchi). $\widehat{\Sigma}=(\Sigma,\widehat{\mathcal{O}}_\Sigma)$ は $(1|N)$ 次元の N スーパーリーマン面とする. $L_{\widehat{\Sigma}}$ は $\widehat{\Sigma}$ 上の直線束とする. そのとき次のようなリーマン・ロッホ型の公式が成り立つ.

$$\mathrm{dim}H^0(\widehat{\Sigma},L_{\widehat{\Sigma}})-\mathrm{dim}H^1(\widehat{\Sigma},L_{\widehat{\Sigma}})=2^N(ch(L_{\widehat{\Sigma}})\cdot td(T\widehat{\Sigma}))[\Sigma]$$

グロタンディーク・マニン群を使ってこの定理 1 の別証明を得る.

定理 2. 次の図式は可換となる.

$$\begin{tikzcd} KS(\widehat{\Sigma}) \arrow[r, "\mathrm{ch}\cdot\mathrm{td}"] \arrow[d, "\chi(\widehat{\Sigma},\cdot)"'] & H^*(\widehat{\Sigma},\mathbb{Q}) \arrow[d, "2^N\cdot\mathrm{deg}"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\iota"'] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

証明. $L_{\widehat{\Sigma}}\in KS(\widehat{\Sigma})$ に対して

$$\chi(\widehat{\Sigma},L_{\widehat{\Sigma}})=\mathrm{dim}H^0(\widehat{\Sigma},L_{\widehat{\Sigma}})-\mathrm{dim}H^1(\widehat{\Sigma},L_{\widehat{\Sigma}})$$

はオイラー標数である. チャーン指標 ch とトッド類 td ([5]) は環準同型

$$\mathrm{ch}: KS(\widehat{\Sigma}) \longrightarrow H^*(\widehat{\Sigma},\mathbb{Q})$$

$$\mathrm{td}: KS(\widehat{\Sigma}) \longrightarrow H^*(\widehat{\Sigma},\mathbb{Q})$$

を定義する. また次のような環準同型が定義できる.

$$KS(\widehat{\Sigma}) \longrightarrow H^*(\widehat{\Sigma},\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$L_{\widehat{\Sigma}}\times T\widehat{\Sigma} \mapsto \mathrm{ch}(L_{\widehat{\Sigma}})\cdot\mathrm{td}(T\widehat{\Sigma}) \mapsto 2^N\cdot\mathrm{deg}(\mathrm{ch}(L_{\widehat{\Sigma}})\cdot\mathrm{td}(T\widehat{\Sigma})).$$

よって定理 1 のグロタンディーク・マニン群による表現を得る. □

参考文献

[1] M.F.Atiyah, K-Theory, Benjamin, 1967.

[2] U.Bruzzo, D.H.Ruiperez, Characteristic Classes of Super vector Bundles, J.Math.Phys., 30, 1233-1237, 1989.

[3] H.Ninnemann, Deformation of Super Riemann Surfaces, Commun.Math.Phys., 150, 267-288, 1992.

[4] T.Taniguchi, ADHM Construction of Super Yang-Mills Instantons, J.Geometry Phys., 59(9), 1199-1209, 2009.

[5] T.Taniguchi, Super Characteristic Classes and certain Riemann-Roch Formula, preprint, 2012.

[6] A.A.Voronov, Yu.I.Manin, I.B.Penkov, Elements of Supergeometry, J. Soviet Math. 51, 2069-2083, 1990.

K-Theory on Supersymmetric Riemann Surfaces and Super Riemann-Roch Theorem

Tadashi TANIGUCHI

The purpose of this paper is to give a K-theory on the supermanifolds. K-theory was introduced by Alexander Grothendieck in the 50's in order to solve some difficult problems in Algebraic Geometry. This idea of K-theory has applied other parts of Mathematics, for example Number Theory, Topology, Noncommutative Geometry and Super String Theory. Among many successes of K-theory, one should mention the solution of supergeometric problems, its wide generalization to the new subject called Super Riemann-Roch Formula.